Wymagania szczegółowe z matematyki w III Liceum Ogólnokształcącym:

**ZAKRES PODSTAWOWY**

**Klasa I (90 h)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** |
| I. Liczby rzeczywiste | |
| * *Liczby naturalne* | * podaje przykłady liczb pierwszych, parzystych i nieparzystych; * stosuje cechy podzielności liczby przez 2, 3, 5, 9; * podaje dzielniki danej liczby naturalnej; * wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych; * oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych; * przeprowadza dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb i reszt z dzielenia.. |
| * *Liczby całkowite, liczby wymierne* | * rozpoznaje wśród podanych liczb liczby całkowite i liczby wymierne; * oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych); * stosuje powszechnie przyjęte oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbol **Z**, dla liczb wymiernych **Q**. |
| * Liczby niewymierne | * wskazuje wśród podanych liczb liczby niewymierne; * szacuje wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby niewymierne; * wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie muszą być liczbami niewymiernymi, * przeprowadza dowody, np. że liczba jest niewymierna, że suma (iloczyn) liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. |
| * *Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej* | * wskazuje wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej liczby wymierne oraz niewymierne; * wyznacza rozwinięcie dziesiętne ułamków zwykłych; * wyznacza wskazaną cyfrę po przecinku w liczbie podanej w postaci rozwinięcia dziesiętnego okresowego; * przedstawia liczbę podaną w postaci ułamka dziesiętnego (skończonego lub nieskończonego okresowego) jako ułamek zwykły. |
| * *Pierwiastek z liczby nieujemnej* | * oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej; * wyłącza czynnik przed znak pierwiastka; * włącza czynnik pod znak pierwiastka; * wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach. |
| * *Pierwiastek sześcienny, pierwiastek nieparzystego stopnia* | * oblicza wartość pierwiastka nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej; * wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb rzeczywistych, stosując prawa działań na pierwiastkach. |
| * Potęga o wykładniku całkowitym | * oblicza wartość potęgi liczby o wykładnikach: naturalnym i całkowitym ujemnym; * stosuje twierdzenia o działaniach na potęgach do obliczania wartości wyrażeń; * stosuje twierdzenia o działaniach na potęgach o wykładniku całkowitym do upraszczania wyrażeń algebraicznych. |
| * Potęga o wykładniku wymiernym | * zapisuje liczby w postaci potęgi o wykładniku wymiernym; * oblicza potęgi liczby dodatniej o wykładniku wymiernym; * stosuje twierdzenia o działaniach na potęgach o wykładniku wymiernym do upraszczania wyrażeń algebraicznych; * porównuje wartości potęg o tej samej podstawie; * udowadnia własności potęg. |
| * Logarytm i jego własności | * stosuje definicję logarytmu do obliczania jego wartości; * stosuje w obliczeniach twierdzenie o na logarytmie iloczynu, logarytmie ilorazu i logarytmie potęgi o wykładniku naturalnym; * udowadnia niewymierność wskazanych liczb, np. . |
| * *Procenty* | * wykonuje obliczenia procentowe: oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, wyznacza liczbę, gdy dany jest jej procent, zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent. |
| * **Zbiory** | * **posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony;** * **wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące;** * **opisuje dany zbiór słownie i symbolem;** * **określa relację zawierania zbiorów.** |
| * **Działania na zbiorach** | * **wyznacza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów;** * **przedstawia na diagramie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach.** |
| * Przedziały | * rozróżnia pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, ograniczony, nieograniczony; * zaznacza przedział na osi liczbowej; * odczytuje i zapisuje symbolem przedział zaznaczony na osi liczbowej; * wymienia liczby należące do przedziału, spełniające zadane warunki. |
| * **Działania na przedziałach** | * wyznacza iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej; * wyznacza iloczyn, sumę i różnicę różnych zbiorów liczbowych oraz zapisuje je symbolem. |
| * Wartość bezwzględna | * oblicza wartość bezwzględną danej liczby; * stosuje interpretacje geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej. |
| II. Wyrażenia algebraiczne | |
| * Wyrażenia algebraiczne | * mnoży sumy algebraiczne; * wyłącza jednomian przed nawias; * wykorzystuje wyrażenia algebraiczne do opisu zależności; * stosuje działania na wyrażeniach algebraicznych do dowodzenia np. podzielności, rozwiązywania równań. |
| * Wzory skróconego mnożenia  oraz | * przekształca wyrażenia algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; * stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci ; * usuwa niewymierność z mianownika ułamka; * stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia własności liczb. |
| III. Równania i nierówności | |
| * *Rozwiązanie równania* | * sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania; * rozpoznaje równania sprzeczne i tożsamościowe oraz podaje ich zbiór rozwiązań; * stosuje przekształcenia równoważne do wyznaczenia rozwiązania równania. |
| * Nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą | * sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem nierówności; * przekształca nierówności w sposób równoważny; * rozpoznaje nierówności sprzeczne i tożsamościowe oraz podaje ich zbiór rozwiązań; * zapisuje zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału. |
| * Równania i nierówności z wartością  bezwzględną | * rozwiązuje, stosując interpretację geometryczną, elementarne równania i nierówności z wartością bezwzględną. |
| IV. Układy równań | |
| * Algebraiczne metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi | * sprawdza, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu równań; * rozwiązuje układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania i przeciwnych współczynników; * określa, czy dany układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny; * stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych. |
| * Interpretacja geometryczna układu  równań liniowych | * podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych; * rozwiązuje metodą graficzną układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi. |
| V. Funkcje | |
| * Pojęcie funkcji | * określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, grafu, wykresu, opisu słownego; * podaje dziedzinę funkcji, zbiór wartości, miejsce zerowe; * szkicuje wykresy funkcji; * oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. |
| * Szkicowanie wykresu funkcji | * szkicuje wykres funkcji, uwzględniając jej dziedzinę; * szkicuje wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach. |
| * Własności funkcji | * odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja jest malejąca, rosnąca, ma stały znak; argumenty, dla których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą); * odczytuje z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje: daną wartość; wartości mniejsze, nie mniejsze, większe i nie większe od danej liczby. |
| * Przekształcenia wykresów funkcji | * na podstawie wykresu funkcji *y* = *f*(*x*) szkicuje wykresy funkcji  *y = f*(*x – p*); * *y = f*(*x*) *+ q, y = f*(*–x*), *y = –f*(*x*). |
| * Proporcjonalność odwrotna | * wskazuje wielkości odwrotnie proporcjonalne i wyznacza współczynnik proporcjonalności; * szkicuje wykres funkcji dla danego *a* > 0 i *x* > 0; * korzysta ze wzoru i wykresu funkcji do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). |
| * Funkcja liniowa | * rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru; * wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie; * interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; * wykorzystuje własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). |
| * Funkcja kwadratowa (postać ogólna  i kanoniczna) | * szkicuje wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem; * wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; * interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej. |
| VI. Planimetria | |
| * *Kąty w trójkącie* | * klasyfikuje trójkąty ze względu na miary ich kątów; * stosuje przy rozwiązywaniu zadań twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta. |
| * Punkty specjalne w trójkącie | * wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności. |
| * *Trójkąty przystające* | * rozpoznaje trójkąty przystające oraz stosuje cechy przystawania trójkątów do rozwiązywania różnych problemów. |
| * Trójkąty podobne | * rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów; * stosuje podobieństwo trójkątów do dowodzenia twierdzeń, w tym do uzasadnienia twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie; * przeprowadza dowód twierdzenia o odcinkach w trójkącie prostokątnym. |
| * Wielokąty podobne | * wykorzystuje przy rozwiązywaniu zadań zależności między polami i obwodami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa. |
| * Twierdzenie Talesa i twierdzenie  odwrotne do twierdzenia Talesa | * stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych. |
| VII. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej | |
| * Równanie prostej na płaszczyźnie | * wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); * bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych; * wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; * oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; * rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje. |

**ZAKRES PODSTAWOWY**

**Klasa II (120 h)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** |
| I. Wyrażenia algebraiczne | |
| * Wzory skróconego mnożenia | * przekształca wyrażenie algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; * stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach zapisanych z użyciem symboli pierwiastków; * usuwa niewymierność z mianownika ułamka. |
| * Wielomiany | * dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej zmiennej; * rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia, wyłączając wspólny czynnik przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów; * stosuje twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych; * dzieli wielomian jednej zmiennej przez dwumian postaci *x* – *a*; * stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian *x* – *a*; * przeprowadza dowód twierdzenia o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci *x* – *a* wraz z algorytmem Hornera. |
| * Wyrażenia wymierne | * określa dziedzinę wyrażenia wymiernego; * mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; * dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne. |
| II. Równania i nierówności | |
| * Równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą | * rozwiązuje równanie kwadratowe przez rozkład na czynniki; * rozwiązuje równanie kwadratowe, korzystając ze wzorów; * interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego; * stosuje związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniej funkcji kwadratowej do rozwiązywania nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą. |
| * Równania wielomianowe | * korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań; * rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych, w szczególności równań dwukwadratowych; * korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań wielomianowych, w tym rozkładając wielomian na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania wyrazów. |
| * Równania wymierne | * rozwiązuje proste równania wymierne postaci , gdzie wielomiany i  są zapisane w postaci iloczynowej. |
| III. Układy równań | |
| * Układy równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi | * rozwiązuje metodą podstawiania układy równań prowadzące do rozwiązywania równań kwadratowych, tj. układy, z których jedno równanie jest równaniem pierwszego, a drugie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi; * znajduje punkty wspólne prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej. |
| IV. Funkcje | |
| * Funkcja kwadratowa (postać ogólna,  kanoniczna i iloczynowa) | * wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; * interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); * wyznacza najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale  domkniętym; * wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym); * uzasadnia wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. |
| V. Optymalizacja | |
| * Funkcja kwadratowa | * wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień optymalizacyjnych geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). |
| VI. Trygonometria | |
| * Definicje funkcji trygonometrycznych | * wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°; * korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych  z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); * oblicza miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną). |
| * Związki między funkcjami trygonometrycznymi | * stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:  sin² *α* + cos² *α* = 1, oraz sin (90° – *α*) = cos *α*; * znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego. |
| VII. Planimetria | |
| * Trójkąty prostokątne | * stosuje przy rozwiązywaniu zadań twierdzenie Pitagorasa, wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego; * stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i przeprowadza jego  dowód. |
| * Zastosowania trygonometrii w planimetrii | * rozwiązuje trójkąty prostokątne z zastosowaniem trygonometrii; * korzysta z własności funkcji trygonometrycznych podczas obliczeń geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta, gdy dane są jego dwa boki i kąt między  nimi. |
| * Wielokąty foremne | * rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności. |
| * Czworokąty | * korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach. |
| * Kąty środkowe i kąty wpisane | * rozpoznaje kąty środkowe i kąty wpisane; * stosuje zależność między kątem środkowym i kątem wpisanym opartym na tym  samym łuku; * stosuje zależność między kątami wpisanymi w ten sam okrąg opartymi na równych łukach; * stosuje twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą; * wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; * przeprowadza dowody twierdzeń o kątach w okręgu; * stosuje wzory na długość łuku okręgu i pole wycinka koła. |
| * Okrąg opisany na trójkącie i okrąg  wpisany w trójkąt | * rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie i okręgu wpisanego w trójkąt; * przekształca wzory na pole trójkąta i udowadnia je. |
| * Twierdzenie sinusów  i twierdzenie cosinusów | * znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów; * udowadnia twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów; * wyprowadza wzór na pole trójkąta . |

**ZAKRES PODSTAWOWY**

**Klasa III (90 h)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** |
| I. Liczby rzeczywiste | |
| * Potęga o wykładniku wymiernym | * oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. |
| * Potęga o wykładniku rzeczywistym | * upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach; * porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z własności potęgowania; * wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w innych dziedzinach, np. fizyce, chemii czy informatyce). |
| * Logarytm. Logarytm dziesiętny | * wykorzystuje definicję logarytmu; * stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi; * udowadnia niewymierność wskazanych liczb, np. log25.. |
| II. Funkcje | |
| * Funkcja wykładnicza | * szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; * posługuje się funkcjami wykładniczymi, aby opisać zjawiska fizyczne, chemiczne, a także wykorzystuje je w kontekście praktycznym. |
| * Funkcja logarytmiczna | * szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; * posługuje się funkcjami logarytmicznymi, aby opisać zjawiska fizyczne, chemiczne, a także wykorzystuje je w kontekście praktycznym; * posługuje się pojęciem logarytmu w zadaniach związanych np. ze skalą Richtera, skalą pH. |
| III. Ciągi | |
| * Pojęcie ciągu | * wyznacza kolejne wyrazy ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów; * wyznacza wyrazy ciągu opisanego słownie; * szkicuje wykres ciągu; * wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. |
| * Ciągi określone rekurencyjnie | * oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie. |
| * Monotoniczność ciągu | * bada monotoniczność ciągu, korzystając z definicji; * wyznacza wartość parametru tak, aby ciąg był ciągiem monotonicznym. |
| * Ciąg arytmetyczny | * bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny; * stosuje i udowadnia wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |
| * Ciąg geometryczny | * bada, czy dany ciąg jest geometryczny; * stosuje i udowadnia wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |
| * Ciągi arytmetyczne i geometryczne | * wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, podczas rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym, m.in. zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok), koszty kredytów. |
| IV. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej | |
| * Odległość punktów w układzie współrzędnych, środek odcinka | * oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; * stosuje przy rozwiązywaniu zadań wzór na odległość punktów; * wyznacza współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych; * stosuje przy rozwiązywaniu zadań wzór na współrzędne środka odcinka. |
| * Odległość punktu od prostej | * oblicza odległość punktu od prostej. |
| * Równanie okręgu | * posługuje się równaniem okręgu . |
| * Wzajemne położenie prostej i okręgu | * określa, ile punktów wspólnych mają prosta i okrąg przy danych warunkach; * wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu; * wyznacza równanie prostej stycznej do okręgu. |
| * Symetrie w układzie współrzędnych | * znajduje obrazy figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgów i wielokątów) w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej o środku w początku układu współrzędnych. |
| V. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka | |
| * Odczytywanie i interpretacja danych  statystycznych | * oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, wyznacza medianę i dominantę; * wykorzystuje przy rozwiązywaniu zadań średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i dominantę; * oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych  odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych; * stosuje skalę centylową do opisu i interpretacji danych statystycznych. |

**ZAKRES PODSTAWOWY**

**Klasa IV (100 h)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** |
| I. Kombinatoryka | |
| * Reguła mnożenia, reguła dodawania | * zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności; * **stosuje permutacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń podczas  rozwiązywania zadań z kombinatoryki.** |
| II. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka | |
| * Prawdopodobieństwo klasyczne | * oblicza prawdopodobieństwo, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |
| * Wartość oczekiwana | * oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach. |
| III. Stereometria | |
| * Proste i płaszczyzny w przestrzeni | * rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się; * wskazuje w wielościanach proste prostopadłe, równoległe i skośne; * wskazuje w wielościanach rzut prostokątny danego odcinka. |
| * Graniastosłupy | * sporządza rysunek graniastosłupa wraz z oznaczeniami; * oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego. |
| * Ostrosłupy | * sporządza rysunek ostrosłupa wraz z oznaczeniami; * oblicza pole powierzchni i objętość ostrosłupa. |
| * Kąt między prostą a płaszczyzną,  kąt dwuścienny | * posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta  dwuściennego; * rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów; * rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; * rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów. |
| * Przekroje prostopadłościanów | * określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną. |
| * Bryły obrotowe | * oblicza pola powierzchni i objętości brył obrotowych; * wskazuje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów. |
| * Bryły podobne | * stosuje zależność między objętościami brył podobnych. |
| * Zastosowania trygonometrii w stereometrii | * stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów i brył obrotowych. |

**ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY  
Klasa I (120 h)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** |
| I. Liczby rzeczywiste | |
| * *Liczby naturalne* | * podaje przykłady liczb pierwszych, parzystych i nieparzystych; * stosuje cechy podzielności liczby przez 2, 3, 5, 9; * podaje dzielniki danej liczby naturalnej; * wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych; * oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych; * przeprowadza dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb, np.: „Uzasadnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9.” |
| * *Liczby całkowite, liczby wymierne* | * rozpoznaje wśród podanych liczb liczby całkowite i liczby wymierne; * oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych). |
| * Liczby niewymierne | * wskazuje wśród podanych liczb liczby niewymierne; * szacuje wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby niewymierne; * wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie muszą być liczbami niewymiernymi; * przeprowadza dowody, np. że liczba jest niewymierna, że suma (iloczyn) liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. |
| * *Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej* | * wskazuje wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej liczby wymierne oraz  niewymierne; * wyznacza rozwinięcie dziesiętne ułamków zwykłych; * wyznacza wskazaną cyfrę po przecinku w liczbie podanej w postaci rozwinięcia dziesiętnego okresowego; * przedstawia liczbę podaną w postaci ułamka dziesiętnego (skończonego lub nieskończonego okresowego) jako ułamek zwykły; * podaje przybliżenia liczb z podaną dokładnością i określa błąd tego przybliżenia. |
| * *Pierwiastek z liczby nieujemnej* | * oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej; * wyłącza czynnik przed znak pierwiastka; * włącza czynnik pod znak pierwiastka; * wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach. |
| * *Pierwiastek sześcienny, pierwiastek nieparzystego stopnia* | * oblicza wartość pierwiastka nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej; * wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb rzeczywistych, stosując prawa działań na pierwiastkach. |
| * Potęga o wykładniku całkowitym | * oblicza wartość potęgi liczby o wykładnikach: naturalnym i całkowitym ujemnym; * stosuje twierdzenia o działaniach na potęgach do obliczania wartości wyrażeń; * stosuje twierdzenia o działaniach na potęgach do upraszczania wyrażeń algebraicznych. |
| * *Notacja wykładnicza* | * zapisuje i odczytuje liczbę w notacji wykładniczej; * wykonuje działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej. |
| * Potęga o wykładniku wymiernym | * oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; * udowadnia własności potęg. |
| * Logarytm i jego własności | * stosuje definicję logarytmu do obliczania jego wartości; * stosuje w obliczeniach twierdzenie o logarytmie iloczynu, logarytmie ilorazu i logarytmie potęgi o wykładniku naturalnym. |
| * *Procenty* | * wykonuje obliczenia procentowe: oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, wyznacza liczbę, gdy dany jest jej procent, zmniejsza i zwiększa liczbę  o dany procent; * **interpretuje pojęcia procentu i punktu procentowego;** * oblicza np. podatki, zyski z lokat. |
| * Wartość bezwzględna | * oblicza wartość bezwzględną danej liczby; * stosuje interpretacje geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej. |
| * Własności wartości bezwzględnej | * stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej; * korzystając z własności wartości bezwzględnej, upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną. |
| * **Zbiory** | * **posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony;** * **wymienia elementy danego zbioru oraz elementy nienależące do niego;** * **opisuje dany zbiór słownie i symbolem;** * **określa relację zawierania zbiorów.** |
| * **Działania na zbiorach** | * **wyznacza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów;** * **przedstawia na diagramie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach.** |
| * Przedziały liczbowe | * rozróżnia pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, ograniczony, nieograniczony; * zaznacza przedział na osi liczbowej; * odczytuje i zapisuje symbolem przedział zaznaczony na osi liczbowej; * wymienia liczby należące do przedziału, spełniające zadane warunki. |
| * **Działania na przedziałach** | * wyznacza iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej; * wyznacza iloczyn, sumę i różnicę różnych zbiorów liczbowych oraz zapisuje je symbolem. |
| II. Wyrażenia algebraiczne | |
| * Wyrażenia algebraiczne | * mnoży sumy algebraiczne; * wyłącza jednomian przed nawias; * wykorzystuje wyrażenia algebraiczne do opisu zależności; * stosuje działania na wyrażeniach algebraicznych do dowodzenia np. podzielności, rozwiązywania równań. |
| * Wzory skróconego mnożenia  (*a* + *b*)² (*a* – *b*)² oraz *a*² *– b*² | * przekształca wyrażenie algebraiczne z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; * stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci ; * usuwa niewymierność z mianownika ułamka; * stosuje wzory skróconego mnożenia do dowodzenia twierdzeń. |
| III. Równania i nierówności | |
| * Rozwiązanie równania, nierówności | * sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności. |
| * Nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą | * rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; * zapisuje zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału; * rozwiązuje układy nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; * stosuje nierówności do rozwiązywania zadań tekstowych. |
| * Równania i nierówności z wartością  bezwzględną | * rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną; * rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując definicję oraz własności wartości bezwzględnej. |
| * Równania i nierówności liniowe  z parametrem | * przeprowadza analizę zadań z parametrem; * zapisuje założenia, dla których zachodzą warunki podane w treści zadania, i wyznacza te wartości parametru, dla których te warunki są spełnione. |
| IV. Układy równań | |
| * Algebraiczne metody rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia   z dwiema niewiadomymi | * rozwiązuje układ równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników; * określa, czy dany układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny; * stosuje układy równań podczas rozwiązywania zadań tekstowych; * rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące układów równań. |
| * Graficzna metoda rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi | * rozwiązuje układ równań metodą graficzną; * wykorzystuje związek między liczbą rozwiązań układu równań a położeniem dwóch prostych. |
| * Równania kwadratowe z jedną niewiadomą | * rozwiązuje równanie kwadratowe przez rozkład na czynniki; * rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając ze wzorów; * interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego. |
| * Nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą | * wykorzystuje związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniej funkcji kwadratowej podczas rozwiązywania nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą. |
| V. Funkcje | |
| * Sposoby opisywania funkcji | * określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, grafu, wykresu, opisu słownego. |
| * Szkicowanie wykresu funkcji | * szkicuje wykres funkcji, uwzględniając jej dziedzinę; * szkicuje wykres funkcji określonej różnymi wzorami w różnych przedziałach. |
| * Wartość funkcji | * oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu; * posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia,  dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość. |
| * Własności funkcji | * odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja jest malejąca, rosnąca, ma stały znak; argumenty, dla których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą); * rozwiązuje równania i nierówności, korzystając z wykresu funkcji; * uzasadnia z definicji monotoniczność funkcji. |
| * Przekształcenia wykresów funkcji | * na podstawie wykresu funkcji *y* = *f*(*x*) szkicuje wykresy funkcji *y* = *f*(*x* – p),  *y* = *f*(*x*) + *q*, *y* = –*f*(*x*), *y* = *f*(–*x*), *y= –f(–x)*, *y* = *|f(x*)| oraz ***y= f*(|*x*|)**; * stosuje złożenia funkcji przy rysowaniu wykresów funkcji złożonych. |
| * Proporcjonalność odwrotna | * wskazuje wielkości odwrotnie proporcjonalne i wyznacza współczynnik proporcjonalności; * szkicuje wykres funkcji  dla danego *a* > 0 i *x* > 0; * korzysta ze wzoru i wykresu funkcji do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). |
| * Funkcja liniowa | * rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru; * wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie; * interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej; * wykorzystuje własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). |
| * Funkcja kwadratowa | * szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; * wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; * interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); * udowadnia wzór na pierwiastki trójmianu kwadratowego. |
| VI. Planimetria | |
| * *Kąty w trójkącie* | * klasyfikuje trójkąty ze względu na miary ich kątów; * stosuje podczas rozwiązywania zadań twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta. |
| * Punkty szczególne w trójkącie | * wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności; * przeprowadza dowody twierdzeń dotyczące własności trójkątów, np. twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie; * udowadnia istnienie niektórych punktów szczególnych trójkąta. |
| * *Trójkąty przystające* | * rozpoznaje trójkąty przystające oraz stosuje cechy przystawania trójkątów do rozwiązywania różnych problemów. |
| * Trójkąty podobne | * rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. |
| * Twierdzenie Talesa i twierdzenie  odwrotne do twierdzenia Talesa | * stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych. |
| * Wielokąty podobne | * wykorzystuje przy rozwiązywania zadań zależności między polami i obwodami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa. |
| VII. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej | |
| * Wektor w układzie współrzędnych | * zaznacza wektory w układzie współrzędnych; * wyznacza współrzędne początku i końca wektora (przy odpowiednich danych). |
| * Równanie prostej na płaszczyźnie | * wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); * bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych; * wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; * oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych. |
| * **Układy nierówności liniowych  z dwiema niewiadomymi** | * **interpretuje geometrycznie nierówności z dwiema niewiadomymi oraz pojęcie półpłaszczyzny otwartej i domkniętej;** * **zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;** * **zapisuje układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawionych w układzie współrzędnych;** * **rozwiązuje graficznie układ kilku nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.** |

**ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY  
Klasa II (150 h)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** | |
| I. Liczby rzeczywiste | | |
| * Potęga o wykładniku rzeczywistym | | * upraszcza wyrażenia, stosując prawa działań na potęgach; * porównuje liczby przedstawione w postaci potęg, korzystając z własności potęgowania; * wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w innych dziedzinach, np.  fizyce, chemii czy informatyce). |
| * Logarytm | | * stosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu; * stosuje własności logarytmów |
| II. Wyrażenia algebraiczne | | |
| * Wzory skróconego mnożenia  (*a* + *b*)³, (*a* – *b*)³, *a*³ + *b*³, *a*³ – *b*³  oraz | * przekształca wyrażenie algebraiczne, w tym do postaci iloczynowej, z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; * stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach zapisanych z użyciem symboli pierwiastków; * usuwa niewymierność z mianownika ułamka. | |
| * Rozkład wielomianu na czynniki | * rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias, oraz metodą grupowania wyrazów. | |
| * Działania na wielomianach | * dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany; * dzieli wielomiany przez dwumian *x* – *a;* * dzieli wielomiany; * stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian *x* – *a*; * przeprowadza dowód twierdzenia o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci *x* – *a* wraz z algorytmem Hornera. | |
| * Wyrażenia wymierne | * określa dziedzinę wyrażenia wymiernego; * dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne; * mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; * rozszerza i skraca wyrażenia wymierne. | |
| III. Równania i nierówności | | |
| * Równania sprowadzalne do równań  kwadratowych | * rozwiązuje równania sprowadzalne do równań kwadratowych. | |
| * Układy równań drugiego stopnia | * rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych; * stosuje układy równań drugiego stopnia do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej. | |
| * Wzory Viète’a | * stosuje wzory Viète’a; * wyprowadza wzory Viète’a. | |
| * Równania i nierówności kwadratowe  z parametrem | * przeprowadza analizę zadań z parametrem i ustala założenia, dla których zachodzą warunki podane w treści zadania i wyznacza te wartości parametru, dla których te warunki są spełnione. | |
| * Równania wielomianowe | * rozwiązuje równania wielomianowe, stosując metodę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodę grupowania wyrazów; * stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych; * rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych; * stosuje twierdzenie Bézouta. | |
| * Nierówności wielomianowe | * rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe. | |
| * Równania wymierne | * rozwiązuje równania wymierne. | |
| * Nierówności wymierne | * rozwiązuje nierówności wymierne. | |
| * Równania i nierówności z wartością bezwzględną | * rozwiązuje równania wielomianowe i wymierne z wartością bezwzględną | |
| IV. Optymalizacja | | |
| * Funkcja kwadratowa | * wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień optymalizacyjnych geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). | |
| V. Funkcje | | |
| * Funkcja kwadratowa | * wyznacza najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale  domkniętym; * wykorzystuje własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym). | |
| * Funkcja | * szkicuje wykres funkcji dla danego *a*; * korzysta ze wzoru i wykresu funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. | |
| * Funkcja homograficzna | * szkicuje wykresy funkcji homograficznych i określa ich własności; * wyznacza równania asymptot wykresu funkcji homograficznej; * rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące funkcji homograficznej. | |
| * Funkcja wykładnicza | * szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; * posługuje się funkcjami wykładniczymi, aby opisać zjawiska fizyczne, chemiczne, a także wykorzystuje je w kontekście praktycznym. | |
| * Funkcja logarytmiczna | * szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; * posługuje się funkcjami logarytmicznymi, aby opisać zjawiska fizyczne, chemiczne, a także wykorzystuje je w kontekście praktycznym. | |
| VI. Planimetria i trygonometria | | |
| * Trójkąty prostokątne | * stosuje twierdzenie Pitagorasa podczas rozwiązywania zadań, wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i długości wysokości trójkąta równobocznego; * stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i przeprowadza jego dowód. | |
| * Definicje funkcji trygonometryczne kąta wypukłego | * wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dla  kątów wypukłych; * korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych  z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); * oblicza miarę kąta wypukłego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną). | |
| * Związki między funkcjami trygonometrycznymi | * stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:  sin² *α* + cos² *α* = 1, oraz sin (90° – *α*) = cos *α*; * znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta wypukłego. | |
| * Zastosowania trygonometrii w planimetrii | * korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w obliczeniach geometrycznych; * stosuje i wyprowadza wzór na pole trójkąta . | |
| * *Pola czworokątów* | * korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach; * oblicza pola i obwody równoległoboku, rombu, trapezu; * wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania pól czworokątów. | |
| * *Długość okręgu i pole koła* | * wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa; * oblicza długość okręgu i pole koła. | |
| * Kąty środkowe i kąty wpisane | * rozpoznaje kąty środkowe i kąty wpisane; * stosuje zależność między kątem środkowym i kątem wpisanym opartym na tym  samym łuku; * stosuje zależność między kątami wpisanymi w ten sam okrąg opartymi na równych łukach; * stosuje twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą; * przeprowadza dowody twierdzeń o kątach w okręgu; * stosuje wzory na długość łuku okręgu i pole wycinka koła. | |
| * Okrąg opisany na trójkącie i okrąg  wpisany w trójkąt | * rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie i okręgu wpisanego  w trójkąt; * przekształca wzory na pole trójkąta i udowadnia je. | |
| * Czworokąty wypukłe | * stosuje własności kątów i przekątnych czworokątów wypukłych do rozwiązywania zadań z planimetrii. | |
| * Okrąg opisany na czworokącie i okrąg wpisany w czworokąt | * stosuje i udowadnia twierdzenia dotyczące czworokątów wpisanych w okrąg i czworokątów opisanych na okręgu. | |
| * Twierdzenie sinusów i cosinusów | * znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów; * przeprowadza dowód twierdzenia sinusów i cosinusów. | |

**ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY**

**Klasa III (150 h)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** |
| I. Trygonometria | |
| * Kąt obrotu | * zaznacza w układzie współrzędnych kąt o danej mierze; * wyznacza kąt, mając dany punkt należący do jego końcowego ramienia, i odwrotnie – bada, czy punkt należy do końcowego ramienia danego kąta. |
| * Miara łukowa kąta | * stosuje miarę łukową kąta; * zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie. |
| * Definicje funkcji trygonometrycznych  dowolnego kąta | * wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego). |
| * Funkcje okresowe | * odczytuje okres podstawowy funkcji na podstawie jej wykresu; * szkicuje wykres funkcji okresowej; * stosuje okresowość funkcji do wyznaczania jej wartości. |
| * Wykresy funkcji trygonometrycznych | * szkicuje wykres funkcji trygonometrycznych; * posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań i nierówności; * wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych. |
| * Tożsamości trygonometryczne | * stosuje zależności między funkcjami trygonometrycznymi: sin² *α* + cos² *α* = 1, ; * znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta. |
| * Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy  kątów | * stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, w tym do przekształcania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne (również do uzasadniania tożsamości trygonometrycznych); * stosuje wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu; * wyprowadza wzory na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów. |
| * Wzory redukcyjne | * stosuje wzory redukcyjne do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kątów o różnych miarach; * wykorzystuje wzory redukcyjne do upraszczania wyrażeń oraz do udowadniania tożsamości trygonometrycznych. |
| * Równania i nierówności trygonometryczne | * rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne ( stosując poznane wzory). |
| II. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej | |
| * Odległość punktów w układzie współrzędnych | * oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; * stosuje wzór na odległość punktów podczas rozwiązywania zadań. |
| * Środek odcinka | * wyznacza współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych; * stosuje wzór na współrzędne środka odcinka podczas rozwiązywania zadań. |
| * Odległość punktu od prostej | * oblicza odległość punktu od prostej; * stosuje wzór na odległość punktu od prostej przy rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej. |
| * Równanie okręgu | * posługuje się równaniem okręgu oraz opisuje koła za pomocą nierówności; * stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej. |
| * Wzajemne położenie prostej i okręgu | * określa, ile punktów wspólnych mają prosta i okrąg przy danych warunkach; * wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu; * wyznacza równanie prostej stycznej do okręgu. |
| * Wzajemne położenie dwóch okręgów | * wyznacza punkty wspólne dwóch okręgów; * korzysta z własności okręgów stycznych podczas rozwiązywania zadań. |
| * Symetrie w układzie współrzędnych | * znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu. |
| * Wektory | * dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę (również w ujęciu geometrycznym); * interpretuje geometrycznie działania na wektorach; * stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji. |
| III. Ciągi | |
| * Pojęcie ciągu | * wyznacza kolejne wyrazy ciągu, gdy danych jest kilka jego początkowych wyrazów; * wyznacza wyrazy ciągu opisanego słownie; * szkicuje wykres ciągu; * wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. |
| * Monotoniczność ciągu | * bada monotoniczność ciągu, korzystając z definicji; * wyznacza wartość parametru tak, aby ciąg był ciągiem monotonicznym. |
| * Ciągi określone rekurencyjnie | * wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym. |
| * Ciąg arytmetyczny | * bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny; * stosuje i udowadnia wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |
| * Ciąg geometryczny | * bada, czy dany ciąg jest geometryczny; * stosuje i udowadnia wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; * stosuje ciąg geometryczny w zadaniach dotyczących procentu składanego, również osadzonych w kontekście praktycznym, m.in. do wyznaczenia zysków z lokat, kosztów kredytów. |
| * Granica ciągu | * oblicza granice ciągów, korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach; * korzysta z twierdzenia o trzech ciągach do obliczania granic ciągów; * rozpoznaje ciągi rozbieżne. |
| * Szereg geometryczny | * rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne; * stosuje warunek zbieżności do obliczania sum szeregów geometrycznych; * udowadnia wzór skróconego mnożenia na *an* – *bn*. |
| IV. Optymalizacja i rachunek różniczkowy | |
| * Granica funkcji | * oblicza granice funkcji w punkcie i w nieskończoności; * oblicza granice jednostronne; * korzysta z twierdzeń o działaniach na granicach. |
| * Ciągłość funkcji | * bada ciągłość funkcji w punkcie; * korzysta z własności funkcji ciągłych, w tym z własności Darboux. |
| * Pochodna funkcji | * oblicza pochodne funkcji potęgowych o wykładniku rzeczywistym; * oblicza pochodne funkcji, korzystając z twierdzeń o pochodnych sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji; * oblicza pochodną funkcji złożonej; * korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej; * korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji; * znajduje ekstrema funkcji; * bada przebieg zmienności i szkicuje wykresy funkcji; * stosuje pochodną do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych. |

|  |  |
| --- | --- |
| V. Statystyka | |
| * Średnia arytmetyczna, mediana  i dominanta | * oblicza średnią arytmetyczną, wyznacza medianę i dominantę; * wykorzystuje średnią arytmetyczną, medianę i dominantę podczas rozwiązywania zadań. |
| * Średnia ważona, odchylenie standardowe | * oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych. |
| * Skala centylowa | * stosuje skalę centylową. |

**ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY**

**Klasa IV (168 h)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Hasła programowe** | **Wymagania szczegółowe. Uczeń:** | |
| I. Kombinatoryka | | |
| * Reguła mnożenia, reguła dodawania | | * zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania. |
| * Permutacje, wariacje bez powtórzeń  i z powtórzeniami, kombinacje | | * wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji bez powtórzeń i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych. |
| * Wzór dwumianowy Newtona i trójkąt  Pascala | | * stosuje własności trójkąta Pascala i symbolu Newtona; * uzasadnia z zastosowaniem symbolu Newtona własności dotyczące tożsamości kombinatorycznych; * stosuje i udowadnia wzory (*a* + *b*)*n*, (*a* – *b*)*n*. |
| II. Rachunek prawdopodobieństwa | | |
| * Klasyczna definicja prawdopodobieństwa | | * oblicza prawdopodobieństwo, stosując definicję klasyczną prawdopodobieństwa. |
| * Własności prawdopodobieństwa | | * oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego; * stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń; * stosuje własności prawdopodobieństwa w dowodach twierdzeń. |
| * Prawdopodobieństwo warunkowe | | * oblicza prawdopodobieństwo warunkowe. |
| * Twierdzenie o prawdopodobieństwie  całkowitym i wzór Bayesa | | * korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym podczas rozwiązywania zadań; * stosuje wzór Bayesa podczas rozwiązywania zadań. |
| * Schemat Bernoullego | | * stosuje schemat Bernoullego podczas rozwiązywania zadań; |
| * Wartość oczekiwana | | * oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach. |
| III. Stereometria | | |
| * Proste i płaszczyzny w przestrzeni | | * rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się. * wskazuje w wielościanach proste prostopadłe, równoległe i skośne; * wskazuje w wielościanach rzut prostokątny danego odcinka. |
| * Graniastosłupy | | * sporządza rysunek graniastosłupa wraz z oznaczeniami; * oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa. |
| * Ostrosłupy | | * sporządza rysunek ostrosłupa wraz z oznaczeniami; * oblicza pole powierzchni i objętości ostrosłupów. |
| * Kąt między prostą a płaszczyzną,  kąt dwuścienny | | * posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta  dwuściennego; * rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), oblicza miary tych kątów; * rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; * rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów; * stosuje twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny oraz o trzech prostych prostopadłych; * przeprowadza dowód twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny oraz twierdzenia o trzech prostych prostopadłych. |
| * Przekroje wielościanów | | * określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną; * wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych płaszczyznami; * oblicza pola przekroju, również z zastosowaniem trygonometrii. |
| * Bryły obrotowe | | * oblicza pola powierzchni i objętości brył obrotowych; * wskazuje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów. |
| * Bryły podobne | | * stosuje zależność między objętościami brył podobnych. |
| * Zastosowania trygonometrii w stereometrii | | * stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości wielościanów i brył obrotowych. |
| * Zagadnienia optymalizacyjne | | * stosuje pochodną funkcji do zadań optymalizacyjnych ze stereometrii. |